Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

الفصل الثاني: مبادئ علم السكون والمساند

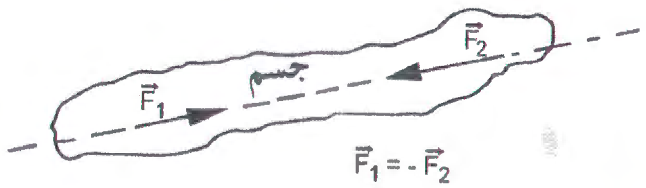
STATIQUE

ككل علم فإن علم السكون يبنى على مجموعة من المسلمات axiomes التي نقبلها بدون برهان. هذه المسلمات لا تفندها التجارب المختلفة التي أجريت.

1- المبادئ:

1-1 المبدأ الأول:

إذا كان جسم صلب خاضعا لقوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ فإن هذا الأخير لا يمكن أن يكون في حالة توازن إلا إذا كانت شدتا $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ متساويتين وكانت $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ على نفس الحامل وفي اتجاهين مختلفين. لاحظ الشكل:



1-2 المبدأ الثاني:

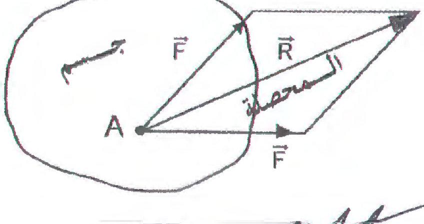
لا يتغير فعل جملة مفروضة من القوى إذا أضفنا لهذه الجملة أو طرحنا منها جملة أخرى متوازنة.

و هذا يعني أن جملتين من القوى اللتان تختلفان بمجموعة من القوى المتوازنة متكافئتان.

من المبدأين 1 و 2 نستنتج النظرية التالية:

1-3 المبدأ الثالث: (بديهية متوازي أضلاع القوى)

يمكن تعويض كل قوتين متلاقيتين مؤثرتين على جسم في نقطة واحدة، بقوة واحدة تسمى المحصلة وتؤثر في نفس النقطة وتمثل هندسيا بقطر متوازي الأضلاع المرسوم على هاتين القوتين.

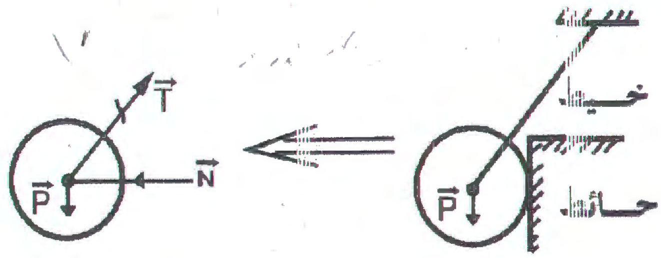


Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

1-5 المبدأ 4 :

يمكن تمثيل جسم مقيد بجسم حر (غير مقيد) عندما نعوض القيود بردود أفعالها. ففي الشكل الموالي نزعنا من الجسم مساند وعوضناها بردود أفعال. الشكل المتحصل عليه يسمى **مخطط الجسم الحر** diagramme du corps libre.



1-6 المبدأ 5 :

الجسم غير القابل للحركة نتيجة اتصاله أو إمساكه بأجسام أخرى، يسمى جسما مقيدا.

1-4 المبدأ 6 : (مبدأ الفعل ورد الفعل)

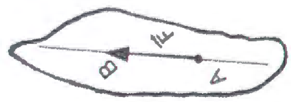
لكل فعل يؤثر به جسم مادي على جسم آخر، رد فعل يساويه في المقدار ويعاكسه في الاتجاه. و هذا المبدأ هو القانون الثالث لـــ Newton.

11- الجسم الحر:

الجسم الحر يمكنه أن يتحرك في كافة الاتجاهات دون أن يعرقله حاجز، بمعنى آخر هو جسم غير مثبت بأجسام أخرى، ويمكن إزاحته عن موضعه في أي اتجاه

القوة مقدار شعاعي (متجه) ويتحدد تأثيرها على الجسم بما يلي:

- شدة القوة أو مقدارها: هي مقدار تأثيرها. وحدة قياسها هي" نيوتن Newton "
- حامل القوة: هو الخط الذي يحمل هذه القوة.
- نقطة تأثير القوة: هي النقطة التي تطبق فيها القوة.
- إتجاه القوة: هو الاتجاه الذي تأخذه هذه القوة انطلاقا من نقطة تأثيرها.



- قوة الفعل ورد الفعل:

يؤثر جسمان على بعضهما البعض بقوتين متساويتين ومتعاكستين على نفس الحامل.

Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

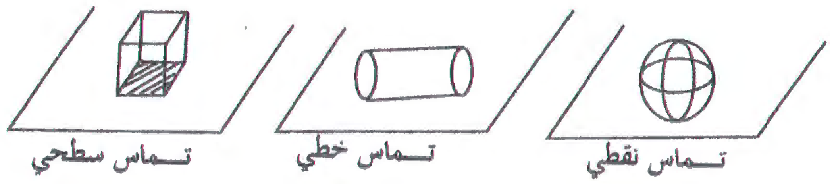
2 ème année ST B

نظرية إنزلاقية القوة:

لا يتغير فعل قوة مطبقة على جسم صلب إذا قمنا بــزلــق نقطــة تطبيــق القــوة علــى حاملها إلى أية نقطة من الجسم الصلب.

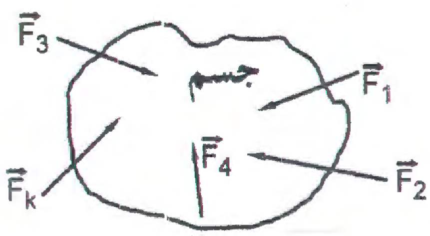
- قوة التماس:

هذا النوع من القوى، ينشأ فقط عنــد تلامــس جسـيمين. تعـرف هـذه القــوة بــالقوة المطبقة على جسم ما من طرف الأجسام المماســة لــه. يكــون التمــاس بــين الأجســام إما نقطي أوخطي أو سطحي.



10- نظام القوى (جملة القوى):

نقول عن جسم إنه خاضع لنظام قــوى، إذا كــان تحــت تــأثير مجموعــة مــن القــوى والتي تسمى جمله قوى أو نظام قوى.



15- محصلة القوى:

يمكن تعويض القــوى المــؤثرة علــى جســم مــا بقــوة واحــدة مكافئــة لهـما تسـمى بالمحصلة.

16- القوة الموازنة:

تسمى القوة المساوية للمحصلة في الشــدة والمعاكســة لهــا فــي الاتجـاه ولهـا نفـس الحامل، بالقوة الموازنة. ويمكن أن نقول عن أي مجموعة مــن القــوى أنهــا مركبــات المحصلة.

17- القوة الخارجية:

القوة الخارجية هي التي تؤثر على جوانب جسم ما مــن طــرف أجســام أو جســيمات أخرى لا تنتمي إليه.

18- القوة الداخلية:

القوة الداخلية هي القوة التي تؤثر بها جسيمات المكونة لجسم ما على بعضها البعض.

Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

5- نظرية فارينيون Varignon:

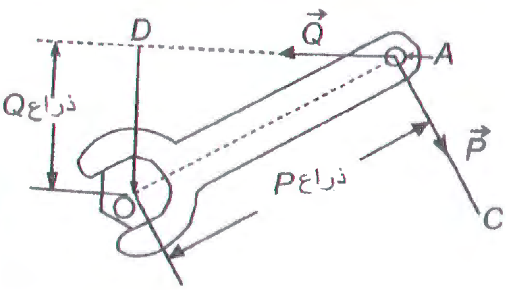
مجموع عزم نظام قوى بالنسبة لنقطة ما هو عزم محصلة نظـــام هـــذه القـــوى بالنســـبة لهذه النقطة.

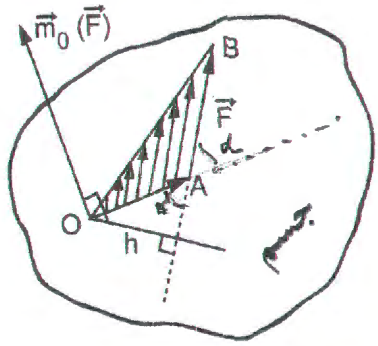
$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{m}_O(F_1) + \vec{m}_O(F_2) + ... + \vec{m}_O(F_n)$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(F_k)$$

1- عزم القوة بالنسبة لنقطة:

عمليا نلاحظ أن القوة $\vec{P}$ العمودية على المقبض تكون أكثـــر فعاليـــة مـــن القـــوة $\vec{Q}$، بمعنـــى أننا نجد سهولة في تدوير العزقة le boulon باستعمال القوة $\vec{P}$ أحسن من القوة $\vec{Q}$.





نعرف عزم القوة بالنسبة للنقطة O بالعلاقة:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$$

حيث A هي نقطة تأثير القوة $\vec{F}$. $M = OA \times F \sin(\widehat{OA, F})$

و هو الجداء الشعاعي لشعاع موضع القـــوة نفســـها، بمعنـــى آخـــر، عـــزم القـــوة $\vec{F}$ حول النقطة O يساوي حاصل ضرب مقدار القـــوة فـــي طـــول الـــذراع مـــع الأخـــذ بعين الاعتبار الإشارة المناسبة باتجاه الدوران.

3- خصائص عزم القوة بالنسبة لنقطة :

- لا يتغير عزم القوة عند نقل نقطة تأثيرها على حاملها.
- عزم القوة بالنسبة لنقطة O لا ينعـدم إلا عنـدما تنعـدم القـوة أو عنـدما يمـر حاملها بالنقطة (O أي عندما يساوى الذراع صفرا)

Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

2- المساند:(المرتكزات)

هو جمع مسند وهو ما أسند عليه الإنشاء الميكانيكي وعنده تؤثر مركبات ردود الأفعال اللازمة لإحداث التوازن تحت تأثير ما عليه من حمولات ومؤثرات خارجية أو داخلية.

نختار نوع درجة الحرية لكل مسند، منع الحركة كليا أو جزئيا عند نقطة الاستناد.

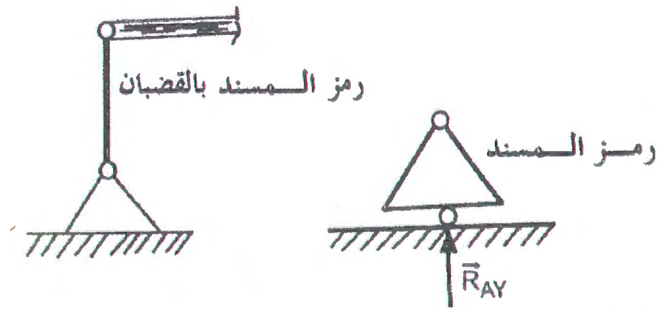
يمكن أن تنقسم الحركة في ذاتها إلى حركة انتقالية وحركة دورانية. ويحدد المسند طريقة تثبيت المنشأ. وتتوقف بالتالي مركبات ردود الأفعال اللازمة على نوع المسند أو طريقة التثبيت.

2-1 المسند البسيط: (أو المسند المتمفصل المتحرك)

يمكن للجسم في حالة استعمال هذه المساند أن يتحرك حركتين فقط. هذا النوع من المساند يسمح بالحركة الانتقالية و الدورانية للإنشاء عند نقطة الاستناد.

في هذه المساند لا يمنع الجسم فيها إلا من حركة واحدة بسبب الرابطة المانعة لتلك الحركة وبالتالي يكون رد فعل واحد عموديا ويمثل المسند البسيط كالتالي:

- R_{AY}رد فعل شاقولي



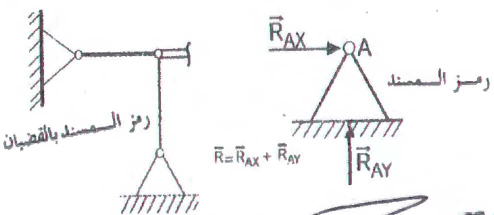
2-2 المسند المضاعف: (المسند المتمفصل الثابت أو الثنائي)

هذا النوع من المساند يسمح بدوران الإنشاء. الحركة الانتقالية غير ممكنة. في هذه المساند يمكن للجسم أن يدور حول المفصل ولا يمكنه أن يتحرك حركة انتقالية في الاتجاهين. الحركتان الممنوعتان سببهما هو وجود رابطتين تمنعهما من التحرك في الاتجاهين

من مركبتين للقوى و هما قوة افقية وقوة شاقولية.

يمثل المسند الثنائي كالتالي:

- R_{AX}رد فعل أفقي
- R_{AY}رد فعل شاقولي

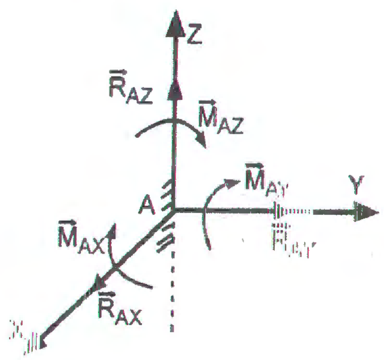


Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

5-2 المسند الموثوق في الفضاء (الاندماج):

هو المسند الذي لا يسمح عنده بالحركة، سواء كانت دورانا أو انتقالا. إن نقطة الاستناد أو ما تسمى بنقطة الوثاقة ليس لها إمكانية الحركة إطلاقا ونتيجة لذلك يلزم أن يكون لرد الفعل عند هذا المسند ستة مركبات: قوة أفقية، قوة شاقولية وعزم وثاقة. في هذا المسند، الجسم يمنع من التحرك تماما وبالتالي فهناك ثلاثة ردود أفعال ناتجة عن الروابط المانعة للحركات الانتقالية الثلاثة. وبالإضافة إلى هذه، توجد ردود أفعال أخرى ناتجة عن الروابط المانعة للحركات الدورانية حول محاور الإحداثيات الثلاثة وهي كما يلي:



- F_{AX} رد فعل القوة الأفقية
- R_{AY} رد فعل القوة الشاقولية
- R_{AZ} رد فعل قوة الاندماج
- M_{AX} رد فعل عزم الوثاقة للدوران حول X
- M_{AY} رد فعل عزم الوثاقة للدوران حول Y
- M_{AZ} رد فعل عزم الوثاقة للدوران حول Z

3- شروط توازن أي مجموعة قوى في الفضاء:

لكي يكون أي جسم في حالة توازن يجب أن يكون مجموع عزوم القوى المؤثرة عليه بالنسبة لأي نقطة ومجموع كل القوى المؤثرة عليه يساويان الصفر.

$$\vec{R}_O = \sum_{K=1}^{n} \vec{F}_K = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{K=1}^{n} \vec{m}_o(F_K) = 0$$

بمعنى آخر:

$$R_O = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} = 0$$

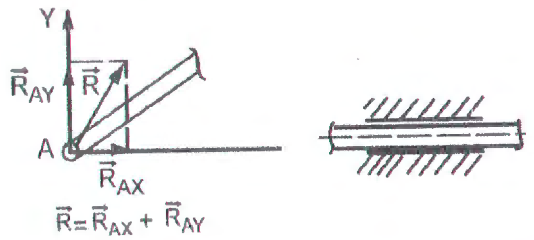
$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(\sum m_x(F_k))^2 + (\sum m_y(F_k))^2 + (\sum m_z(F_k))^2} = 0$$

Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

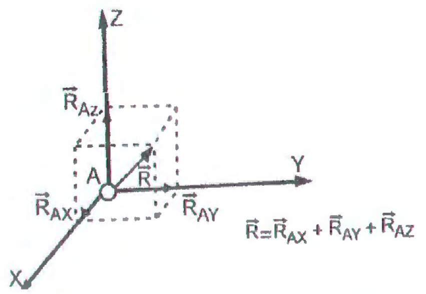
2-3 المفصلة الاسطوانية:

هذا المسند له نفس مميزات المسند المتمفصل الثابت. في هذا المسند يمكن للجسم أن يدور حول المفصل ولا يمكنه أن يتحرك في الاتجاهين. الحركتان الممنوعتان سببهما هو وجود رابطتين تمنعهما من التحرك في الاتجاهين الأفقي و الشاقولي.



2-4 المفصلة الكروية Rotule sphérique:

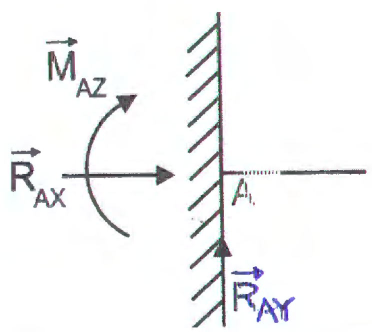
في هذا المسند يمكن للجسم أن يدور حول المفصل ولا يمكنه أن يتحرك في أي اتجاه. الحركات الممنوعة سببهما هو وجود روابط تمنعها من التحرك في كل الاتجاهات، واعتمادا على مبدأ الفعل ورد لفعل، فهناك ثلاثة ردود أفعال في هذا النوع من المساند:



- R_{AX} رد فعل أفقي
- R_{AY} رد فعل شاقولي
- R_{AZ} رد فعل اندماج

2-6 المسند الموثوق في المستوي:

هو المسند الذي لا يسمح عنده بالحركة، سواء كانت دورانا أو انتقالا. إن نقطة الاستناد أو ما تسمى بنقطة الوثاقة ليس لها إمكانية الحركة إطلاقا ونتيجة لذلك يلزم أن يكون لرد الفعل عند هذا المسند ثلاث مركبات بصفة عامة: قوة أفقية، قوة شاقولية وعزم وثاقة.



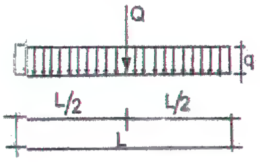
- R_{AX} رد فعل أفقي
- R_{AY} رد فعل شاقولي
- M_{AZ} رد فعل عزم للدوران حول المحور

Résumé du Cours de la Mécanique Rationnelle

2 ème année ST B

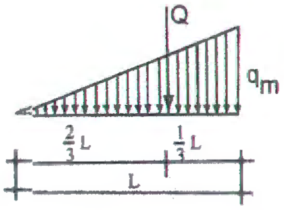
5- الحمولات الموزعة:

- الحمل الموزع بانتظام:



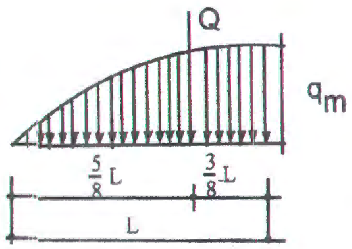
$Q=qL$

- الحمل الموزع على شكل مثلث:



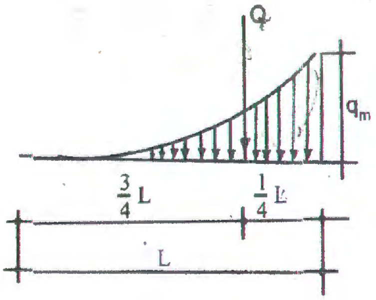
$Q=\frac{1}{2}q_mL$

- الحمل الموزع على شكل قطع مكافئ محدب:



$Q=\frac{2}{3}q_m L$

- الحمل الموزع على شكل قطع مكافئ مقعر:



$Q=\frac{1}{3}q_m L$

LES EQUATIONS d'EQUILIBRE DE LA STATIQUE

DANS L'ESPACE

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0 \quad (1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kY}=0 \quad (2)$$
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0 \quad (3)$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k)=0 \quad (4)$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_Y(F_k)=0 \quad (5)$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)=0 \quad (6)$$

DANS LE PLAN

1er METHODE

$$\sum F_{kx}=0$$
$$\sum F_{kY}=0$$
$$\sum m_O(F_k)=0$$

2ème METHODE

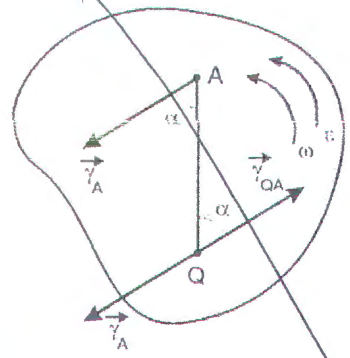
$$\left.\begin{array}{l}\sum m_A(\vec{F_k})=0\\ \sum m_B(\vec{F_k})=0\\ \sum (F_k)=0\end{array}\right\}$$ AB NON ⊥ PROJECTION DES FORCES

3ème METHODE

$$\left.\begin{array}{l}\sum m_A(\vec{F_k})=0\\ \sum m_B(\vec{F_k})=0\\ \sum m_C(\vec{F_k})=0\end{array}\right\}$$ A, B, C NON ALIGNÉS

11- المركز اللحظي للتسارع:

في لحظة زمنية توجد نقطة من مقطع الجسم أثناء حركته المستوية يساوي تسارعها صفرا. و هذا ما يسمى بالمركز اللحظي للتسارعات.



لتعيين موضع المركزِ اللحظي للتسارعات الذي يرمز عادة بـ Q يجب معرفة تسارع نقطة ما من نقاط الجسم

و المقدرين ε و ω .

لنرسم المستقيم AQ الذي يساوي:

$$AQ = \frac{\gamma_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

الزاوية α تتناسب مع اتجاه التسارع الزاوي و تحسب ابتداء من تسارع النقطة.

ملاحظة:

إذا اعتبرنا النقطة Q كمركز لحظي للتسارعات، فإن تسارع أية نقطة B مثلا من نقاط الجسم تساوي

تسارعه أثناء الحركة الدورانية حول المركز اللحظي للتسارعات.

$$\vec{\gamma}_{BQ} = \vec{\gamma}'_{BQ} + \vec{\gamma}''_{BQ}$$

12- منحنى المركز اللحظي للدوران

1-12 مقدمة:

في الحركة المستوية، المركز اللحظي للدوران يغير من موضعه من حين إلى آخر و لهذا يرسم منحى.

لنعتبر عجلة تتدحرج بدون انزلاق على مستوي أفقي. لنرسم في كل لحظة زمنية موقع المركز اللحظي للدوران على المستوي الأفقي و على العجلة، نجد سلسلتين من النقاط:

- الأولى: منحنى بالنسبة للمستوي الثابت.
- الثانية: منحنى بالنسبة للعجلة المتحركة.

2-12- منحني مركز الدوران الثابت: (Centroïde Fixe)

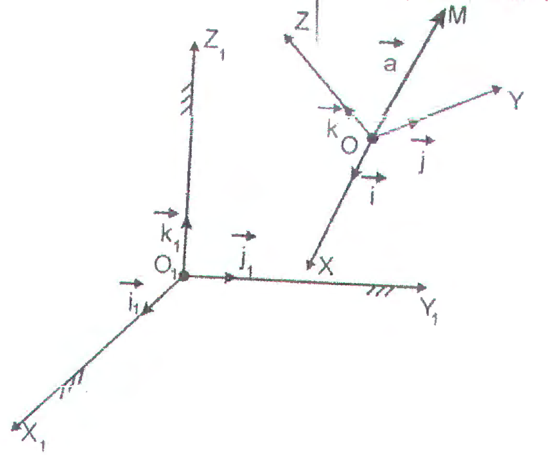
تسمى المواقع الهندسية التي يرسمها المركز اللحظي للدوران على المستوي الثابت منحني مركز اللحظي الثابت.

3-12- منحني مركز الدوران المتحرك: (Centroïde Mobile)

تسمى المواقع الهندسية التي يرسمها المركز اللحظي للدوران على المستوي المرتبط بالجسم في حركة مستوية منحني مركز اللحظي المتحرك.

الفصل الثالث
الحركة المركبة للنقطة

MOUVEMENT-COMPOSE



1- مقدمة:

درسنا سابقا حركة نقطة بالنسبة لمعلم ثابت

و لكن في بعض الأحيان نحتاج دراسة حركة نقطة في معلم منسوب لجملة متحركة بالنسبة لمعلم ثابت. لهذا يجب معرفة حركة نقطة M في الجملة المتحركة و كذلك حركة الجملة المتحركة و المتحرك M بالنسبة للجملة الثابتة.

مثال: رجل يسير داخل قطار (معلم متحرك $OXYZ$) يتحرك بالنسبة لمحطة (معلم فرض ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$).

نستطيع أن نقول أن الحركة المركبة تنقسم إلى قسمين:

أ - الأولى بالنسبة لمعلم متحرك تسمى بالحركة النسبية.

ب - الثانية بالنسبة لمعلم فرض ثابت و تسمى هذه الحركة بالحركة المطلقة.

لتكن M نقطة مادية تتحرك بالنسبة لمعلم متحرك $OXYZ$ حيث $\vec{i}\ \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الوحدة على المحاور OX, OY, OZ على الترتيب و $O_1X_1Y_1Z_1$ معلم ثابت ، حيث $\vec{i}_1\ \vec{j}_1, \vec{k}_1$ أشعة الوحدة على المحاور O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 على الترتيب.

2- الحركة المركبة:

هي حركة النقطة M التي تتحرك بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$ ، والتي تتحرك بدورها بطريقة معينة بالنسبة لمعلم ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$.

1-2 الحركة النسبية :

هي حركة النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$ (حركة الرجل بالنسبة للقطار) .

السرعة و التسارع النسبيان تمثلان سرعة و تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$

[illegible] (الجر):

[illegible] نقطة M' من الجسم الصلب التي تتطابق مع المتحرك M في اللحظة t بالنسبة للمعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$. السرعة والتسارع المكتسبان تمثلان سرعة و تسارع M' بالنسبة للمعلم الثابت (حركة الرجل بالنسبة للمحطة عندما تنعدم سرعة المسافر).

3-2 الحركة المطلقة:

هي حركة النقطة M بالنسبة للمعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$ (حركة الرجل بالنسبة للمحطة).
السرعة المطلقة والتسارع المطلق تمثلان سرعة و تسارع M بالنسبة للمعلم الثابت.

3-تعريف المشتقة المطلقة:

هو مشتق الشعاع $\vec{r}$ المعبر عنه في المعلم الثابت.
نفرض نقطة M تتحرك في الفضاء بالنسبة لمعلم متحرك $OXYZ$ ، و الذي بدوره يتحرك بالنسبة لمعلم ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$.
باستعمال أشعة الوحدة، شعاع موضع المتحرك M بالنسبة للمعلم المتحرك يساوي:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

المشتق الأول لشعاع موضع النقطة يساوي:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

نضع:

$$\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} \qquad (1)$$

نلاحظ أن المعادلة (1) هي سرعة النقطة M بالنسبة للجملة المتحركة ولهذا :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (2)$$

نعلم أن:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} \qquad (3)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

2

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نجد:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + a_x(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + a_y(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + a_z(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

[illegible]ان:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

نستنتج ما يلي:

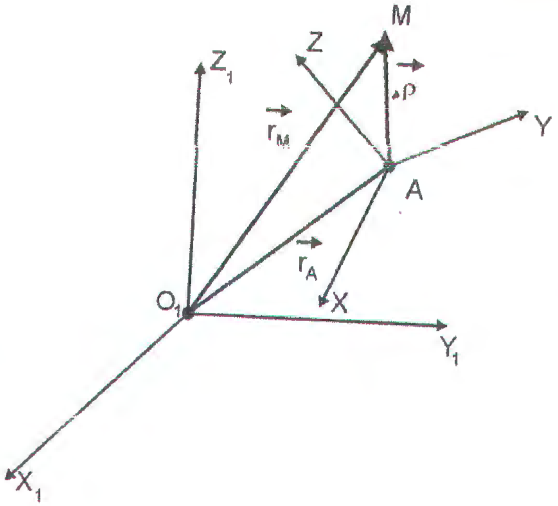
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{a} \qquad (4)$$

حيث $\vec{\omega}$ يسمى بشعاع السرعة الدورانية.

خلاصة:

المشتق المطلق للشعاع المعرف في المعلم المتحرك يساوي إلى الجمع الهندسي بين مشتق في المعلم المتحرك و الجداء الشعاعي للسرعة الزاوية للمعلم المتحرك في الشعاع نفسه.

4-1. شعاع الموضع:



ليكن $\vec{r}_M$ شعاع موضع النقطة M بالنسبة للمبدأ O_1 المعرف في المعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$ و $\vec{\rho}$ شعاع الموضع للنقطة M بالنسبة للمبدأ A المعلم المتحرك $OXYZ$ ، و $\vec{r}_A$ هو شعاع الموضع للمبدأ A بالنسبة للمبدأ O_1 .

يكتب شعاع موضع النقطة M على النحو التالي:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

4-2 السرعة المطلقة:

السرعة المطلقة للنقطة M تساوي المشتق الأول لشعاع موضع نفس النقطة:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{\rho})$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

3

$$\vec V_a = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\tilde{\vec\rho}}{dt} + \vec\omega\wedge\vec\rho$$
$$\vec V_a = \vec V_A + \vec V_r + \vec\omega\wedge\vec\rho$$
$$\vec V_a = (\vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho) + \vec V_r$$

حيث:

$\vec V_A$ - سرعة مبدأ المعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت .

$\vec V_r$ - سرعة النقطة M بالنسبة للمبدأ A للمعلم المتحرك تسمى السرعة النسبية.

$\vec V_e$ - تسمى بالسرعة المكتسبة أو سرعة الجر مع العلم أن:

$$\vec V_e = \vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho$$

$\vec V_a$ - تسمى السرعة المطلقة للنقطة M بالنسبة للمعلم الثابت.

أخيرا نستنتج العلاقة الأساسية لتركيب السرعات:

$$\vec V_a = \vec V_e + \vec V_r$$

خلاصة:

خلال الحركة المركبة السرعة المطلقة تساوي المجموع الشعاعي للسرعتين النسبية والمكتسبة

4- العلاقة الأساسية في تركيب التسارعات (نظرية كوريوليس (Coriolis) :

تسارع نقطة هو المشتق الأول لسرعة هذه النقطة:

$$\vec V_a = \vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho + \vec V_r$$

تسارع المطلق النقطة A يساوي:

$$\vec\gamma_a = \frac{d\vec V_a}{dt}$$
$$\vec\gamma_a = \frac{d(\vec V_A+\vec\omega\wedge\vec\rho+\vec V_r)}{dt}$$
$$\vec\gamma_a = \frac{d\vec V_A}{dt} + \frac{d\vec\omega}{dt}\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge\frac{d\vec\rho}{dt} + \frac{d\vec V_r}{dt}$$

حيث:

- تسارع النقطة A بالنسبة للمعلم الثابت هو:

$$\frac{d\vec V_A}{dt} = \vec\gamma_A$$

- تسارع الزاوي للمعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت هو:

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = \vec\varepsilon$$

و الشعاعان التاليان معرفان في المعلم المتحرك:

$$\frac{d\vec\rho}{dt},\quad \frac{d\vec V_r}{dt}$$

إذن باستعمال المعادلة (4) نجد:

$$\frac{d\vec\rho}{dt} = \frac{d\tilde{\vec\rho}}{dt} + (\vec\omega\wedge\vec\rho)$$
$$\frac{d\vec\rho}{dt} = \vec V_r + (\vec\omega\wedge\vec\rho)$$
$$\frac{d\vec V_r}{dt} = \frac{d\tilde{\vec V_r}}{dt} + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$
$$\frac{d\vec V_r}{dt} = \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

و منه نستنتج أن:

$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge\left[\vec V_r + (\vec\omega\wedge\vec\rho)\right] + \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$
$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge V_r + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho) + \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$
$$\vec\gamma_a = [\vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho)] + \vec\gamma_r + 2(\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

حيث $\vec\gamma_a$ هو التسارع المطلق، $\vec\gamma_r$ هو التسارع النسبي،

$$[\vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho)] = \vec\gamma_e$$

التسارع المكتسب و $2(\vec\omega\wedge\vec V_r) = \vec\gamma_C$ هو تسارع كوريوليس Coriolis[2].

أخيرا نتحصل على التسارع المطلق كما يلي:

$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_r + \vec\gamma_e + \vec\gamma_C$$

تسمى العلاقة السابقة بالعلاقة الأساسية لتركيب التسارعات.

خلاصة:

التسارع المطلق لنقطة يساوي المجموع الهندسي للتسارع النسبي و تسارع الجر و تسارع كوريوليس.

5- حساب التسارع المكمل (كوريوليس) Coriolis:

تسارع كوريوليس Coriolis للنقطة يساوي ضعف حاصل الجداء الشعاعي لسرعة دوران محور المعلم المتحرك حول المبدأ و السرعة النسبية للنقطة.

$$\vec\gamma_C = 2(\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

---

[2] Gaspard Gustave Coriolis (1792-1843) Mathématicien et Ingénieur Français عالم رياضيات و مهندس فرنسي

أ- طويلة تسارع كوريوليس:

$$\gamma_C = 2\omega V_r \sin(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r})$$

ب- اتجاه تسارع كوريوليسCoriolis:

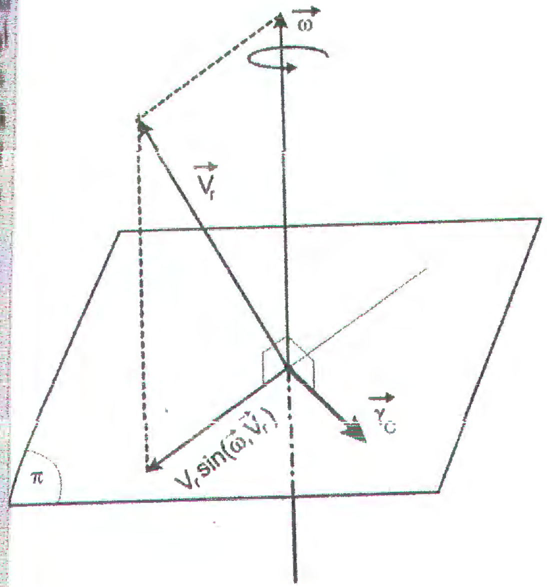
يتجه $\vec{\gamma}_C$ كالشعاع $\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$، أي عمودي على المستوي المتكون من الشعاعين $\vec{V}_r$ و $\vec{\omega}$ في الناحية التي يشاهد فيها المشاهد أصغر إدارة للمتجه $\vec{\omega}$ لكي ينطبق على شعاع السرعة $\vec{V}_r$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

1-5 قاعدة جوكوفسكي Joukovski[3]:

يمكن تعيين المتجه $\vec{\gamma}_C$ بإسقاط الشعاع $\vec{V}_r$ على المستوي العمودي على $\vec{\omega}$ ثم إدارة مسقط $\vec{V}_r$ بزاوية 90^0 في اتجاه الدوران المكتسب.

تنبيه: مسقط $\vec{V}_r$ على المستوي هو

$$V_r \sin(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r})$$



2-5 الحالات التي ينعدم فيها تسارع كوريوليس:

تسارع كوريوليس يمكن أن ينعدم في الحالات التالية:

أ- عندما يكون $\omega = 0$ أي عندما تكون الحركة المكتسبة انسحابية أو عندما تكون السرعة الزاوية في اللحظة الزمنية المعطاة أثناء الدوران المكتسب معدومة أي انسحاب المعلم المتحرك فقط.

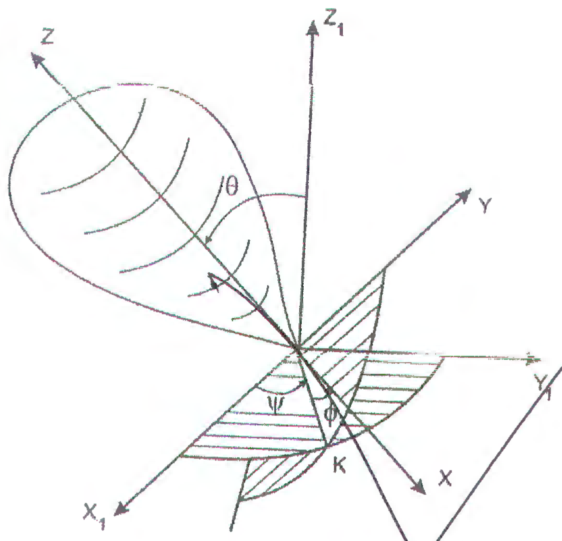
ب- عندما يكون $V_r = 0$ أو عندما تساوي السرعة النسبية في اللحظة المعطاة صفر.

ج- عندما تكون الزاوية $(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r}) = k\pi$ أي عندما تحدث الحركة النسبية في اتجاه موازي لمحور الدوران المكتسب أو إذا كان الشعاع $\vec{V}_r$ موازيا لهذا المحور في اللحظة المعطاة $\vec{\omega} // \vec{V}_r$.

[3] ...Joukovski (1847-1921) Savant Russe ex Soviétique عالم روسي

الفصل الرابع

حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة



1- تعريف زوايا أولير (Angles d'Euler):

يحدد موضع جسم صلب في حركة دورانية حول نقطة ثابتة باستعمال ثلاثة إحداثيات زاوية تسمى زوايا أولير. هذه الإحداثيات يرمز إليها عادة بـــ ϕ, θ, ψ كما موضح في الشكل.

نعتبر معلم $OXYZ$ المرتبطة بالجسم الصلب الذي ندرس حركته و معلم ثابت $OX_1Y_1Z_1$.

1-1 خط العقد (Lignes des Noeuds):

يسمى نصف المستقيم OK نتيجة تقاطع المستويان OXY و OX_1Y_1 بخط العقد. هذا الخط يكون دوما عموديا على المستوي المار بالمحورين OZ و OZ_1.

2-1 زاوية الطواف (Angle de Precession):

تسمى الزاوية ψ التي تحدد دوران الجسم حول المحور OZ_1 بزاوية الطواف.

3-1 زاوية الترنح (Angle de Nutation):

تسمى الزاوية θ التي تحدد دوران الجسم حول خط العقد بزاوية الترنح.

4-1 زاوية الدوران الذاتي (Angle de Rotation Propre): تسمى الزاوية ϕ التي تحدد دوران الجسم حول OZ بزاوية الدوران الذاتي.

2- تعيين سرعة نقطة لجسم صلب في حركة دورانية حول نقطة ثابتة:

1-2 شعاع الموضع:

نعتبر M نقطة ما من الجسم الصلب الذي يوجد في حركة دورانية حول نقطة ثابتة. يعتبر $\vec{r}$ شعاع الموضع للنقطة M بالنسبة لـــ $OXYZ$.

نكتب شعاع الموضع على الشكل التالي:

نتحصل على جملة الإحداثيات الأسطوانية.

$X=\rho\cos\varphi$

$Y=\rho\sin\varphi$

$Z=Z$

3-6-4 الإحداثيات الكروية:

$$q_1=r,\ q_2=\theta,\ q_3=\varphi$$

نتحصل على جملة الإحداثيات الكروية.

$X=r\sin\theta\cos\varphi$

$Y=r\sin\theta\sin\varphi$

$Z=r\cos\theta$

4-6-4 الإحداثيات القطبية:

$$q_1=r;\ q_2=\varphi,\ q_3=0$$

نتحصل على جملة الإحداثيات الأسطوانية

$X=r\cos\varphi$

$Y=r\sin\varphi$

الفصل الثاني
الحركة المستوية للجسم الصلب

MOUVEMENT - PLAN

1- مقدمة:

نقول على حركة جسم صلب أنها مستوية عندما تتحرك جميع نقاط الجسم الصلب موازية لمستوي معين ثابت.

1-1 الحركة العامة في المستوي:

في هذه الحالة يمكن اعتبار الحركة على أنها حركة انتقالية موازية لمستوي معين ثابت مصحوبة بحركة دورانية حول محور مناسب عمودي على هذا المستوي.

2-1 الحركة الدورانية حول محور ثابت :

في هذه الحالة يدور الجسم الصلب حول محور ثابت عمودي على المستوي.

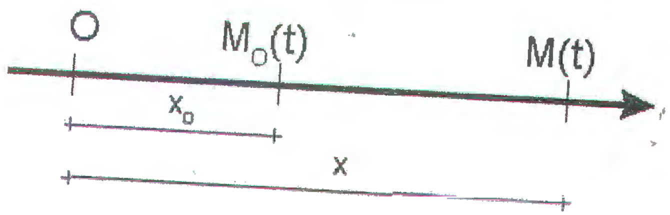
3-1 تعريف الجسم الصلب:

هو مجموعة من الجسيمات بحيث لا تتغير مسافة بين أي جسيمين فيها مهما كانت القوى المؤثرة.

2-الحركة الانسحابية (الانتقالية):

هي حركة الجسم الصلب التي يتحرك من خلالها أي مستقيم مأخوذ في هذا الجسم موازيا لنفسه. ترسم نقاط الجسم مسارات واحدة و تكون لها في كل لحظة زمنية سرعات وتسارعات متساوية مقدارا واتجاها.

1-2 الحركة المستقيمة المنتظمة:



أبسط أنواع حركة النقطة هي الحركة المستقيمة، عندما يكون خط سير النقطة خطا مستقيما. نقول على حركة مستقيمة أنها منتظمة لما يقطع جسم مسافات متساوية خلال أزمنة متساوية.

1-1-2 موضع النقطة M :

نفرض أن نقطة ما M تتحرك على خط مستقيم OX ابتداءا من الموضع M_0 في اللحظة t_0 إلى الموضع M في اللحظة t. نضع $OM=x$ و $OM]_{t=0}=x_0$.

يحدد موضع النقطة M في اللحظة t بـ $x=OM=x(t)$. تسمى هذه المعادلة السابقة بالدالة الزمنية لحركة النقطة M .

في اللحظة الابتدائية لدينا:

$$x=\int vdt=vt+c$$

$$t=0, x=x_0$$

$$\Rightarrow x=v\cdot 0+c$$

$$\Rightarrow x=x_0=c$$

إذن تحصل على الدالة الزمنية للنقطة المتحركة M :

$$x=vt+x_0$$

2-2 الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

نقول عن حركة أنها مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان التسارع المتوسط عبارة عن قيمة ثابتة، أو بمعنى آخر معادلة الزمنية هي دالة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن.

1-2-2 الدالة الزمنية للحركة:

$$\gamma=\frac{dv}{dt}=c^{te}$$

$$\Rightarrow dv=\int \gamma dt$$

لدينا:

$$v=\gamma t+c_1$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v$$

$$\Rightarrow dx=vdt$$

نعوض v في المعادلة السابقة:

$$dx=(\gamma t+c_1)dt$$

$$\Rightarrow x=\int(\gamma t+c_1)dt+c_2$$

$$\Rightarrow x=\int \gamma t dt+\int c_1 dt+c_2$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\gamma t^2+c_1 t+c_2$$

$$v_0=\gamma\cdot 0+c_1=c_1$$

$$x_0=\frac{1}{2}\gamma\cdot 0+c_1\cdot 0+c_2=c_2$$

$$\Rightarrow c_1=v_0$$

$$\Rightarrow c_2=x_0$$

نستنتج بأن الدالة الزمنية تساوي:

$$x=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0 t+x_0$$

2-2-2 قانون تغير سرعة الحركة المتغيرة بانتظام:

يعتبر المشتق الأول للدالة الزمنية لحركة النقطة.

$$v=\gamma t+v_0$$

3-2-2 الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام:

نقول عن الحركة أنها متسارعة بانتظام إذا كانت القيمة المطلقة للسرعة تزداد بنفس المقدار خلال فترات زمنية متساوية.

4-2-2 الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام:

نقول عن الحركة أنها متباطئة بانتظام إذا كانت القيمة المطلقة للسرعة تتناقص بنفس المقدار خلال فترات زمنية متساوية.

3- الحركة الدورانية للجسم :

1-3 تعريف:

هي حركة جسم صلب التي تظل خلالها أية نقطتان من نقاطه ثابتتين طول الزمن . و يسمى المستقيم المار بالنقطتين الثابتتين بمحور الدوران.

وبتعبير آخر هي حركة مستوية مسارها عبارة عن دائرة. الحركة الدائرية هي حركة منحنية يكون فيها نصف قطر انحناء المسار ثابتا دوما و كذلك مركز الانحناء هو نقطة ثابتة في الفضاء.

2-3 الحركة الدائرية بانتظام:

هي حركة دائرية حيث تكون سرعة المتحرك ثابتة ، بمعنى آخر إذا تساوت الإزاحات الزاوية للجسم خلال أزمنة متساوية.

نفرض أن الجسم يدور بانتظام بحيث يقطع في فترة زمنية t إزاحة زاوية ϕ.

هي المشتق الأول للإزاحة الدورانية ϕ :

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = c^{te}$$

3-2-3 التسارع الزاوي:

هو المشتق الأول للسرعة الزاوية الدورانية ω :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

نستنتج من السرعة الزاوية للنقطة :

$$d\phi = \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \phi = \int \omega\, dt = \omega t + c$$

الشروط الابتدائية للحركة:

$$t = 0, \phi = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \omega \cdot 0 + c \Rightarrow c = \phi_0$$

إذن بعد تعويض الشروط الابتدائية للحركة الدورانية في المعادلة الزمنية للنقطة نتحصل:

$$\phi = \phi_0 + \omega t$$

4-2-3 السرعة الخطية للنقطة:

$$v = R\dot{\phi} = R\omega$$

5-2-3 التسارع المماسي للنقطة:

هو المشتق الأول للسرعة الخطية المماسية للدوران:

$$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

6-2-3 التسارع الناظمي للنقطة:

$$\gamma_\eta = R\dot{\phi}^2 = R\omega^2$$

3-3 الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

هي حركة دائرية حيث يكون التسارع المماسي γ_τ للمتحرك ثابتا.

1-3-3 التسارع المماسي للدوران:

$$\gamma_\tau = R\varepsilon = c^{te}$$

$$\varepsilon = c^{te}$$

بالمكاملة نحصل على السرعة الزاوية:

$$\omega = \int \varepsilon\, dt = \varepsilon t + c_1$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \omega \Rightarrow d\phi = \omega\, dt = (\varepsilon t + c_1)\, dt$$

بمكاملة ثانية نحصل على:

$$\phi = \int (\varepsilon t + c_1)\, dt = \int \varepsilon t\, dt + c_1 \int dt$$

لنحصل على قانون الدوران المتغير بانتظام:

$$\phi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + c_1 t + c_2$$

الزاوية الدورانية الابتدائية:

$$\phi = \phi_0$$

السرعة الزاوية الابتدائية:

$$\omega = \omega_0$$

لنحصل على:

$$\omega_0 = \varepsilon \cdot 0 + c_1 = c_1$$

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2$$

3-3-3 قانون الدوران المتغير بانتظام:

بعد تعويض الثوابت في المعادلة السابقة نجد:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

4-3-3 قانون تغير السرعة الزاوية:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

5-3-3 السرعة الخطية:

$$v = R\omega = R(\omega_0 + \varepsilon t)$$

6-3-3 التسارع المماسي:

$$\gamma_\tau = R\ddot{\phi} = R\varepsilon$$

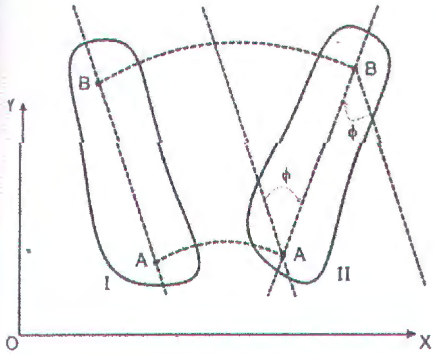
[illegible] التسارع الناظمي:

$$\gamma_\eta = R\dot{\phi}^2 = R(\omega_0 + \varepsilon t)^2$$

8-3-3 الحركة الدائرية المتسارعة بانتظام:
نقول عن حركة أنها متسارعة إذا كانت السرعة الزاوية و التسارع الزاوي لهما نفس الإشارة.

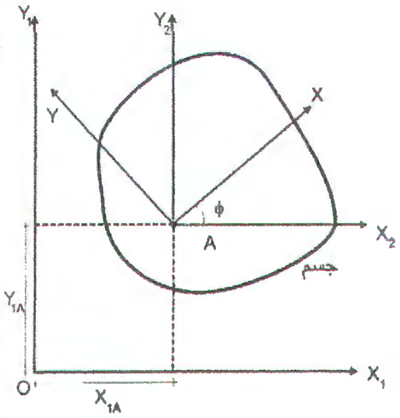
9-3-3 الحركة الدائرية المتباطئة بانتظام:
نقول عن حركة أنها متباطئة إذا كانت السرعة الزاوية و التسارع الزاوي مختلفين في الإشارة.

4- تحليل الحركة المستوية إلى حركة انسحابية و دورانية:
الحركة المستوية للجسم تتكون من الحركة الانسحابية التي تتحرك خلالها جميع نقاط الجسم كحركة المركز A ومن الحركة الدورانية حول هذا المركز A .



5- معادلة الحركة المستوية للجسم:
لنفرض جسما صلبا يتحرك موازيا لمستوي معين ثابت OX_1Y_1 و نعتبر مستوي آخر AX_2Y_2 موازيا للمستوي OX_1Y_1 الثابت.
ليكن OX_1Y_1 المعلم الثابت و AX_2Y_2 معلم لحركة انسحابية و AXY معلم مثبت بالجسم.
تسمى المعادلات التالية بمعادلات الحركة المستوية:

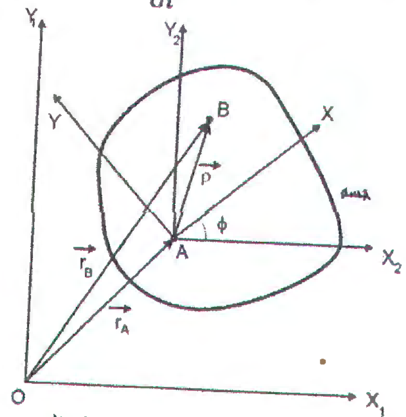
$$X_{1A} = X_{1A}(t)$$
$$Y_{1A} = Y_{1A}(t)$$
$$\varphi = \varphi(t)$$



6- حساب سرعات نقاط الجسم الصلب:
نحصل على عبارة السرعة باشتقاق شعاع موضع النقطة B ، وهي نقطة كيفية من الجسم، بالنسبة للزمن.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$
$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

مع العلم أن سرعة النقطة B بالنسبة AX_2Y_2 هي $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$:



حركة الجسم بالنسبة لـــ AX_2Y_2 هي حركة دورانية حول المحور AZ_2 المار بالمركز A وعمودي على مستوي الشكل.

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

إن سرعة أية نقطة من نقاط الجسم في الحركة المستوية هي الجمع الشعاعي لسرعة أية نقطة A مأخوذة كقطب و سرعة النقطة B أثناء دورانها مع الجسم حول هذا القطب A .

7- نظرية مساقط سرعتي نقطتين من الجسم:
لدينا المعادلة:

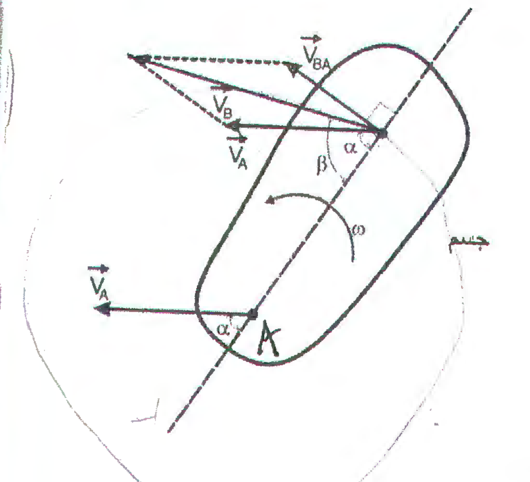
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

إسقاط المعادلة السابقة على المستقيم AB :

$$V_B \cos\alpha = V_A \cos\beta$$

نذكر أن $\vec{V}_{BA}$ يكون عموديا على AB .

خلاصة:
مسقطا سرعتي نقطتين من نقاط الجسم على المستقيم الرابط بين هاتين النقطتين متساويان .



8- المركز اللحظي للدوران:
المركز اللحظي للدوران هو تلك النقطة التي تكون سرعتها في لحظة زمنية معينة معدومة.

Vr. cosβ = VA cosα

لنفرض $AP = \frac{V_A}{\omega}$ عمودية على السرعة V_A و نبحث عن النقطة P .

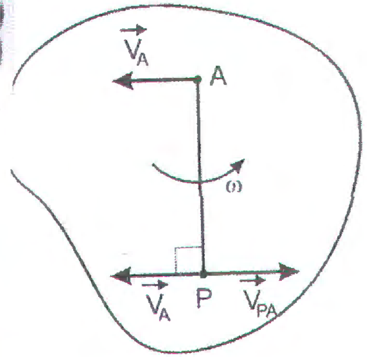
$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}$$

$$\vec{V}_{PA} = \vec{\omega} \wedge \vec{PA} = -\vec{\omega} \wedge \vec{AP} = -\vec{V}_A$$

نستنتج أن:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = \vec{0}$$

إذا P هو المركز اللحظي للدوران و يسمى كذلك المركز اللحظي للسرعات.



ملاحظة:

يمكن اعتبار المركز اللحظي للسرعات كقطب، إذن :

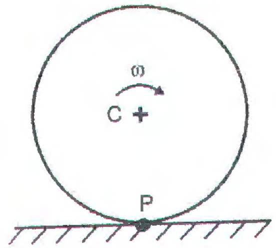
$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP}$$

خلاصة:

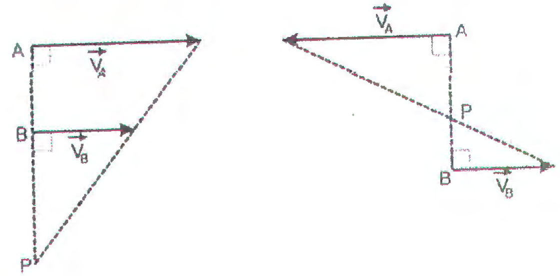
سرعة أية نقطة من الجسم في الحركة المستوية تساوي سرعة الدوران حول المركز اللحظي للدوران .

9- الحالات الخاصة لتعيين المركز اللحظي للدوران:

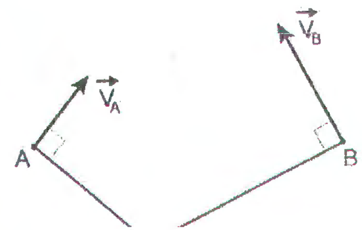
9-1 إذا تمت الحركة المستوية عن طريق دحرجة جسم على سطح آخر ثابت بدون انزلاق، فإن نقطة التلامس P في اللحظة الزمنية المعطاة سرعتها تساوي صفرا، وبالتالي فان هذه النقطة هي المركز اللحظي للدوران.



9-2 إذا كانت سرعتا النقطتين A و B متوازيتين، والمستقيم AB عمودي على السرعة $\vec{V}_A$ في النقطة A ، فإن المركز اللحظي للدوران يتحدد بالطريقة المبينة في الشكل المقابل:



9-3 يكفي لتعيين المركز اللحظي للسرعات معرفة اتجاهي السرعتين $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ للنقطتين A و B المأخوذتين من نقاط مقطع الجسم. المركز اللحظي للدوران هو نقطة تقاطع العمودين الساقطين من النقطتين A و B على سرعتي هاتين النقطتين .



10- حساب التسارع :

إن سرعة أية نقطة من نقاط الجسم في الحركة المستوية هي:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\rho} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{\rho} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{BA}$$

$$\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}_{BA}$$

مع العلم أن:

$$\vec{\gamma}_{BA} = \vec{\gamma}^t_{BA} + \vec{\gamma}^n_{BA}$$

و هذا يعتبر تسارع النقطة B أثناء دورانها حول القطب A .

10-1 التسارع المماسي:

$$\vec{\gamma}^t_{BA} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{\rho}$$

طويلة التسارع المماسي تساوي:

$$\gamma^t_{BA} = \varepsilon AB$$

10-2 التسارع الناظمي:

$$\vec{\gamma}^n_{BA} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{BA}$$

طويلة التسارع الناظمي تساوي:

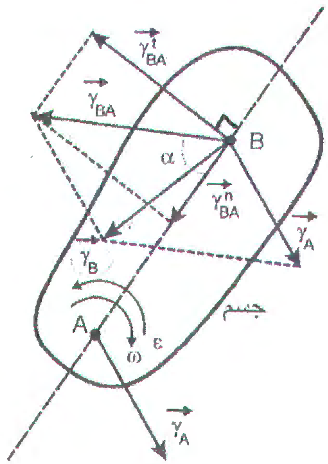
$$\gamma^n_{BA} = \omega^2 AB$$

و أخيرا نستنتج أن طويلة تسارع النقطة B أثناء دورانها حول القطب A تساوي:

$$\gamma_{BA} = \sqrt{(\gamma^t_{BA})^2 + (\gamma^n_{BA})^2}$$

$$\gamma_{BA} = \sqrt{(\varepsilon AB)^2 + (\omega^2 AB)^2}$$

$$\gamma_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



خلاصة:

إن تسارع أية نقطة B من نقاط الجسم هو الجمع الشعاعي لتسارع نقطة أخرى A مأخوذة كقطب وتسارع النقطة B أثناء دورانها مع الجسم حول هذا القطب A .

$$\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}^\tau_{BA} + \vec{\gamma}^n_{BA}$$

$$\vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}_{BA}$$

استنادا للشكل نجد:

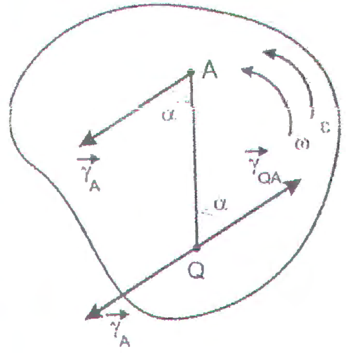
$$\tan\alpha = \frac{\gamma^\tau_{BA}}{\gamma^n_{BA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

11- المركز اللحظي للتسارع:

في لحظة زمنية توجد نقطة من مقطع الجسم أثناء حركته المستوية يساوي تسارعها صفرا. و هذا ما يسمى بالمركز اللحظي للتسارعات.

لتعيين موضع المركزِ اللحظي للتسارعات الذي يرمز عادة بـ Q يجب معرفة تسارع نقطة ما من نقاط الجسم و المقدرين ε و ω .

لنرسم المستقيم AQ الذي يساوي:



$$AQ = \frac{\gamma_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$$\alpha = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

الزاوية α تتناسب مع اتجاه التسارع الزاوي و تحسب ابتداء من تسارع النقطة.

ملاحظة:

إذا اعتبرنا النقطة Q كمركز لحظي للتسارعات، فان تسارع أية نقطة B مثلا من نقاط الجسم تساوي تسارعه أثناء الحركة الدورانية حول المركز اللحظي للتسارعات.

$$\vec{\gamma}_{BQ} = \vec{\gamma}\,'_{BQ} + \vec{\gamma}\,''_{BQ}$$

12- منحنى المركز اللحظي للدوران

1-12 مقدمة:

في الحركة المستوية، المركز اللحظي للدوران يغير من موضعه من حين إلى آخر و لهذا يرسم منحنى.

لنعتبر عجلة تتدحرج بدون انزلاق على مستوي أفقي. لنرسم في كل لحظة زمنية موقع المركز اللحظي للدوران على المستوي الأفقي و على العجلة، نجد سلسلتين من النقاط:

- الأولى: منحنى بالنسبة للمستوي الثابت.
- الثانية: منحنى بالنسبة للعجلة المتحركة.

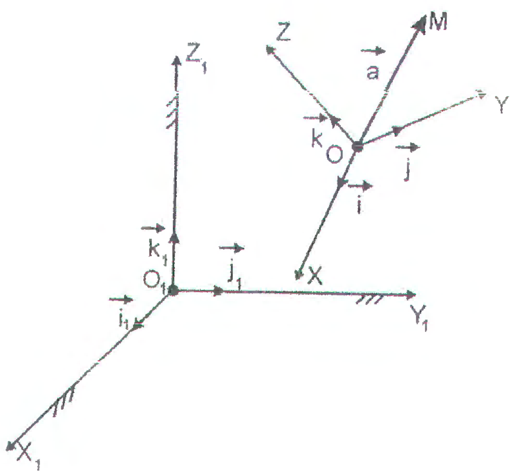
2-12- منحنى مركز الدوران الثابت: (Centroïde Fixe)

تسمى المواقع الهندسية التي يرسمها المركز اللحظي للدوران على المستوي الثابت منحنى مركز اللحظي الثابت.

3-12- منحنى مركز الدوران المتحرك: (Centroïde Mobile)

تسمى المواقع الهندسية التي يرسمها المركز اللحظي للدوران على المستوي المرتبط بالجسم في حركة مستوية منحنى مركز اللحظي المتحرك.

الفصل الثالث
الحركة المركبة للنقطة



1- مقدمة:

درسنا سابقا حركة نقطة بالنسبة لمعلم ثابت، و لكن في بعض الأحيان نحتاج دراسة حركة نقطة في معلم منسوب لجملة متحركة بالنسبة لمعلم ثابت. لهذا يجب معرفة حركة نقطة M في الجملة المتحركة، و كذلك حركة الجملة المتحركة و المتحرك M بالنسبة للجملة الثابتة.

مثال: رجل يسير داخل قطار (معلم متحرك $OXYZ$) يتحرك بالنسبة لسكة (معلم فرض ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$).

نستطيع أن نقول أن الحركة المركبة تنقسم إلى قسمين:

أ - الأولى بالنسبة لمعلم متحرك تسمى بالحركة النسبية.

ب - الثانية بالنسبة لمعلم فرض ثابت و تسمى هذه الحركة بالحركة المطلقة.

لتكن M نقطة مادية تتحرك بالنسبة لمعلم متحرك $OXYZ$ حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الوحدة على المحاور $OX,\ OY,\ OZ$ على الترتيب و $O_1X_1Y_1Z_1$ معلم ثابت ، حيث $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ أشعة الوحدة على المحاور $O_1X_1,\ O_1Y_1,\ O_1Z_1$ على الترتيب.

2- الحركة المركبة:

هي حركة النقطة M التي تتحرك بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$ ، والتي تتحرك بدورها بطريقة معينة بالنسبة لمعلم ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$.

1-2 الحركة النسبية :

هي حركة النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$ (حركة الرجل بالنسبة للقطار) .

السرعة و التسارع النسبيان تمثلان سرعة و تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك $OXYZ$

2-2 الحركة المكتسبة (الجر):

هي حركة نقطة M' من الجسم الصلب التي تتطابق مع المتحرك M في اللحظة t بالنسبة للمعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$. السرعة والتسارع المكتسبان تمثلان سرعة و تسارع M' بالنسبة للمعلم الثابت (حركة الرجل بالنسبة للمحطة عندما تنعدم سرعة المسافر).

3-2 الحركة المطلقة:

هي حركة النقطة M بالنسبة للمعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$ (حركة الرجل بالنسبة للمحطة).
السرعة المطلقة والتسارع المطلق تمثلان سرعة و تسارع M بالنسبة للمعلم الثابت.

3-تعريف المشتقة المطلقة:

هو مشتق الشعاع $\vec{r}$ المعبر عنه في المعلم الثابت.
نفرض نقطة M تتحرك في الفضاء بالنسبة لمعلم متحرك $OXYZ$ ، و الذي بدوره يتحرك بالنسبة لمعلم ثابت $O_1X_1Y_1Z_1$.
باستعمال أشعة الوحدة، شعاع موضع المتحرك M بالنسبة للمعلم المتحرك يساوي:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

المشتق الأول لشعاع موضع النقطة يساوي:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

نضع:

$$\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} \qquad (1)$$

نلاحظ أن المعادلة (1) هي سرعة النقطة M بالنسبة للجملة المتحركة ولهذا :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (2)$$

نعلم أن:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}$$
$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{j} \qquad (3)$$
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{k}$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) نستنتج:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + a_x(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + a_y(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + a_z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}\wedge(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

نعلم أن:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

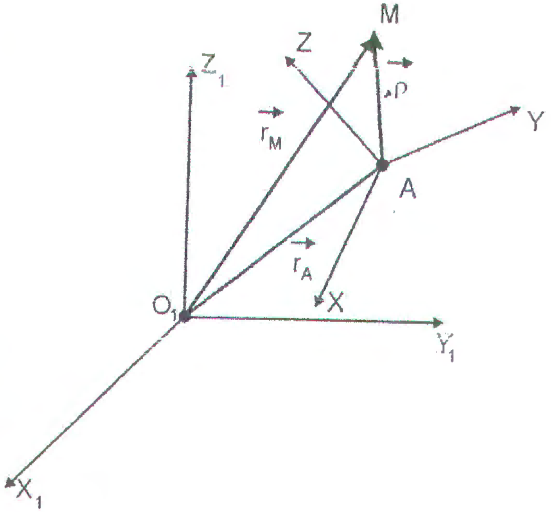
نستنتج ما يلي:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\vec{a} \qquad (4)$$

حيث $\vec{\omega}$ يسمى بشعاع السرعة الدورانية.

خلاصة:
المشتق المطلق للشعاع المعرف في المعلم المتحرك يساوي إلى الجمع الهندسي بين مشتق في هذا المعلم المتحرك و الجداء الشعاعي للسرعة الزاوية للمعلم المتحرك في الشعاع نفسه.

1-3- شعاع الموضع:



ليكن $\vec{r}_M$ شعاع موضع النقطة M بالنسبة للمبدأ O_1 المعرف في المعلم الثابت $O_1X_1Y_1Z_1$ و $\vec{\rho}$ شعاع الموضع للنقطة M بالنسبة للمبدأ A للمعلم المتحرك $OXYZ$ ، و $\vec{r}_A$ هو شعاع الموضع للمبدأ A بالنسبة للمبدأ O_1 .
يكتب شعاع موضع النقطة M على النحو التالي:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

2-3 السرعة المطلقة:

السرعة المطلقة للنقطة M تساوي المشتق الأول لشعاع موضع نفس النقطة:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{\rho})$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\vec V_a = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\vec\rho}{dt} + \vec\omega\wedge\vec\rho$$

$$\vec V_a = \vec V_A + \vec V_r + \vec\omega\wedge\vec\rho$$

$$\vec V_a = (\vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho) + \vec V_r$$

حيث:

$\vec V_A$ - سرعة مبدأ المعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت .

$\vec V_r$ - سرعة النقطة M بالنسبة للمبدأ A للمعلم المتحرك تسمى السرعة النسبية.

$\vec V_e$ - تسمى بالسرعة المكتسبة أو سرعة الجر مع العلم أن:

$$\vec V_e = \vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho$$

$\vec V_a$ - تسمى السرعة المطلقة للنقطة M بالنسبة للمعلم الثابت.

أخيرا نستنتج العلاقة الأساسية لتركيب السرعات:

$$\vec V_a = \vec V_e + \vec V_r$$

خلاصة:

خلال الحركة المركبة السرعة المطلقة تساوي المجموع الشعاعي للسرعتين النسبية والمكتسبة.

4- العلاقة الأساسية في تركيب التسارعات (نظرية كوريوليس Coriolis) :

تسارع نقطة هو المشتق الأول لسرعة هذه النقطة:

$$\vec V_a = \vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho + \vec V_r$$

تسارع المطلق النقطة A يساوي:

$$\vec\gamma_a = \frac{d\vec V_a}{dt}$$

$$\vec\gamma_a = \frac{d(\vec V_A + \vec\omega\wedge\vec\rho + \vec V_r)}{dt}$$

$$\vec\gamma_a = \frac{d\vec V_A}{dt} + \frac{d\vec\omega}{dt}\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge\frac{d\vec\rho}{dt} + \frac{d\vec V_r}{dt}$$

حيث:

- تسارع النقطة A بالنسبة للمعلم الثابت هو:

$$\frac{d\vec V_A}{dt} = \vec\gamma_A$$

- تسارع الزاوي للمعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت هو:

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = \vec\varepsilon$$

و الشعاعان التاليان معرفان في المعلم المتحرك:

$$\frac{d\vec\rho}{dt},\quad \frac{d\vec V_r}{dt}$$

إذن باستعمال المعادلة (4) نجد:

$$\frac{d\vec\rho}{dt} = \frac{d\tilde{\vec\rho}}{dt} + (\vec\omega\wedge\vec\rho)$$

$$\frac{d\vec\rho}{dt} = \vec V_r + (\vec\omega\wedge\vec\rho)$$

$$\frac{d\vec V_r}{dt} = \frac{d\tilde{\vec V}_r}{dt} + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

$$\frac{d\vec V_r}{dt} = \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

و منه نستنتج أن:

$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge\left[\vec V_r + (\vec\omega\wedge\vec\rho)\right] + \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge V_r + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho) + \vec\gamma_r + (\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

$$\vec\gamma_a = [\vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho)] + \vec\gamma_r + 2(\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

حيث $\vec\gamma_a$ هو التسارع المطلق، $\vec\gamma_r$ هو التسارع النسبي،

$$[\vec\gamma_A + \vec\varepsilon\wedge\vec\rho + \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec\rho)] = \vec\gamma_e$$

التسارع المكتسب و $2(\vec\omega\wedge\vec V_r) = \vec\gamma_C$ هو تسارع كوريوليس Coriolis[2].

أخيرا نتحصل على التسارع المطلق كما يلي:

$$\vec\gamma_a = \vec\gamma_r + \vec\gamma_e + \vec\gamma_C$$

تسمى العلاقة السابقة بالعلاقة الأساسية لتركيب التسارعات.

خلاصة:

التسارع المطلق لنقطة يساوي المجموع الهندسي للتسارع النسبي و تسارع الجر و تسارع كوريوليس.

5-حساب التسارع المكمل (كوريوليس) Coriolis:

تسارع كوريوليس Coriolis للنقطة يساوي ضعف حاصل الجداء الشعاعي لسرعة دوران محور المعلم المتحرك حول المبدأ و السرعة النسبية للنقطة.

$$\vec\gamma_C = 2(\vec\omega\wedge\vec V_r)$$

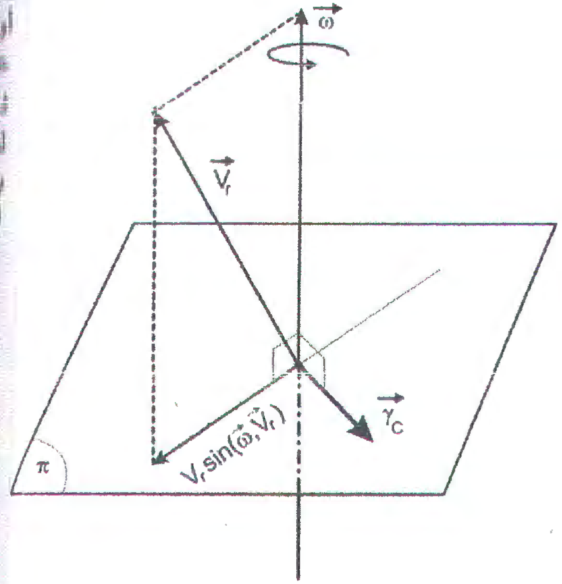
[2] Gaspard Gustave Coriolis (1792-1843) Mathématicien et Ingénieur Français عالم رياضيات و مهندس فرنسي

أ- طويلة تسارع كوريوليس:

$$\gamma_C = 2\omega V_r \sin(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r})$$

ب- اتجاه تسارع كوريوليسCoriolis:

يتجه $\vec{\gamma}_C$ كالشعاع $\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$، أي عمودي على المستوي المتكون من الشعاعين $\vec{V}_r$ و $\vec{\omega}$ في تلك الناحية التي يشاهد فيها المشاهد أصغر إدارة للمتجه $\vec{\omega}$ لكي ينطبق على شعاع السرعة $\vec{V}_r$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.



1-5 قاعدة جوكوفسكي Joukovski[3]:

يمكن تعيين المتجه $\vec{\gamma}_C$ بإسقاط الشعاع $\vec{V}_r$ على المستوي العمودي على $\vec{\omega}$ ثم إدارة مسقط $\vec{V}_r$ بزاوية 90^0 في اتجاه الدوران المكتسب.

تنبيه: مسقط $\vec{V}_r$ على المستوي هو

$$V_r\sin(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r})$$

2-5 الحالات التي ينعدم فيها تسارع كوريوليس:

تسارع كوريوليس يمكن أن ينعدم في الحالات التالية:

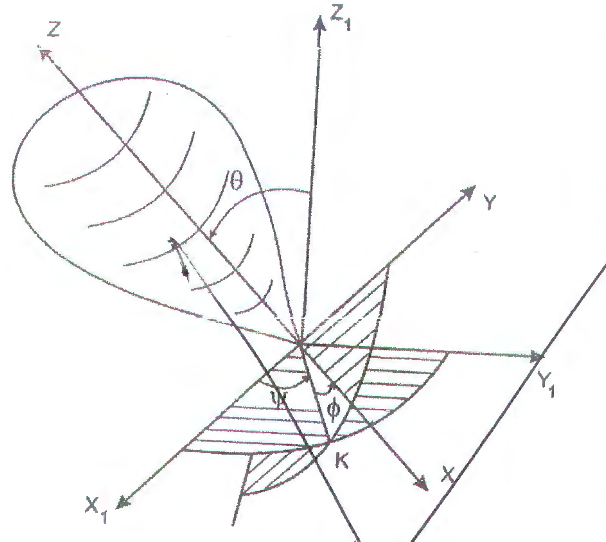
أ- عندما يكون $\omega=0$ أي عندما تكون الحركة المكتسبة انسحابية أو عندما تكون السرعة الزاوية في اللحظة الزمنية المعطاة أثناء الدوران المكتسب معدومة أي انسحاب المعلم المتحرك فقط.

ب- عندما يكون $V_r=0$ أو عندما تساوي السرعة النسبية في اللحظة المعطاة صفر.

ج- عندما تكون الزاوية $(\widehat{\vec{\omega},\vec{V}_r})=k\pi$ أي عندما تحدث الحركة النسبية في اتجاه موازي لمحور الدوران المكتسب أو إذا كان الشعاع $\vec{V}_r$ موازيا لهذا المحور في اللحظة المعطاة $\vec{\omega}//\vec{V}_r$.

الفصل الرابع

حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة



1- تعريف زوايا أولير (Angles d'Euler):

يحدد موضع جسم صلب في حركة دورانية حول نقطة ثابتة باستعمال ثلاثة إحداثيات زاوية تسمى زوايا أولير. هذه الإحداثيات يرمز إليها عادة بـ ϕ, θ, ψ كما موضح في الشكل.

نعتبر معلم $OXYZ$ المرتبطة بالجسم الصلب الذي ندرس حركته و معلم ثابت $OX_1Y_1Z_1$.

1-1 خط العقد (Lignes des Noeuds):

يسمى نصف المستقيم OK نتيجة خط تقاطع المستويان OXY و OX_1Y_1 بخط العقد. هذا الخط يكون دوما عموديا على المستوي المار بالمحورين OZ و OZ_1.

2-1 زاوية الطواف (Angle de Precession):

تسمى الزاوية ψ التي تحدد دوران الجسم حول المحور OZ_1 بزاوية الطواف.

3-1 زاوية الترنح (Angle de Nutation):

تسمى الزاوية θ التي تحدد دوران الجسم حول خط العقد بزاوية الترنح.

4-1 زاوية الدوران الذاتي (Angle de Rotation Propre): تسمى الزاوية ϕ التي تحدد دوران الجسم حول OZ بزاوية الدوران الذاتي.

2- تعيين سرعة نقطة لجسم صلب في حركة دورانية حول نقطة ثابتة:

1-2 شعاع الموضع:

نعتبر M نقطة ما من الجسم الصلب الذي يوجد في حركة دورانية حول نقطة ثابتة. يعتبر $\vec{r}$ شعاع الموضع للنقطة M بالنسبة لـ $OXYZ$.